O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NA EDUCAÇÃO BÁSICA[1] [2]

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba[3]
Universidade Federal de Pernambuco
rborba@ce.ufpe.br

Resumo: Neste artigo são apresentados pressupostos teóricos e evidências empíricas em defesa de um trabalho que incentive o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* na Educação Básica, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio – tanto na modalidade de Ensino Regular, quanto na de Educação de Jovens e Adultos. Argumenta-se, aqui, que desde o início do processo de escolarização, deve-se trabalhar com variadas situações combinatórias e que a resolução de problemas de Combinatória possibilita ricos desenvolvimentos conceituais – específicos à Matemática, e, também, de outras áreas do conhecimento. Uma contribuição a ser considerada é a de que não se deve fazer distinção entre os problemas combinatórios a serem trabalhados explicitamente nos anos iniciais (em geral, apenas os *produtos cartesianos*) e os que são trabalhados em Análise Combinatória no Ensino Médio (*arranjos*, *combinações* e *permutações*). Resultados de pesquisas e propostas de atividades são apresentados neste artigo que justificam a possibilidade de trabalho com variados tipos de problemas de Combinatória, por meio de estratégias e recursos diversos, em diferentes níveis de ensino e nas distintas modalidades escolares, estimulando-se, assim, amplos desenvolvimentos de estudantes.
Palavras-chave: Raciocínio combinatório; Desenvolvimento conceitual; Contribuições teóricas; Aplicações práticas; Educação Básica.

A IMPORTÂNCIA DO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

A Combinatória é conhecida como a *arte de contar*, pois nas situações combinatórias são enumeradas maneiras possíveis de combinar dados objetos. Dessa forma, a Combinatória se constitui num ramo da Matemática que estuda técnicas de contagem – direta e implícita – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam a determinadas condições.

---

[1] Algumas das pesquisas relatadas neste artigo foram desenvolvidas por integrantes do Geração – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE – constituído por professoras e alunas do Centro de Educação da UFPE e por professoras do Ensino Básico.

[2] Os projetos de pesquisa, desenvolvidos pela autora e demais integrantes do Geração, receberam financiamento da FACEPE – Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco - (APQ-1095-7.08/08) e CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - (476665/2009-4).

[3] A autora é docente do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino e das Pós-graduações em Educação e em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC) – Centro de Educação – UFPE. rborba@ce.ufpe.br.

Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto Carvalho e Fernandez (1991) afirmam que na Análise Combinatória[4] são estudadas estruturas e relações discretas, sendo os problemas mais freqüentes a demonstração de existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado que satisfazem determinadas condições e a contagem ou classificação de subconjuntos de um conjunto finito que atendem a certas condições dadas. Estes são os tipos de problemas combinatórios mais trabalhados na Educação Básica.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) colocam que há cinco tipos distintos de problemas combinatórios: a) problemas de *existência* – observação da possibilidade, ou não, de solução diante dos elementos dados e condições determinadas; b) problemas de *enumeração* – listagem de todos os subconjuntos de elementos que satisfazem as condições postas; c) problemas de *contagem* – determinação do número total de soluções, sem necessariamente listar todas; d) problemas de *classificação* – pede-se não que sejam enumerados todos os casos, mas solicita-se que estes sejam classificados segundo critérios apropriados; e e) problemas de *otimização* – busca-se a melhor condição para a obtenção de determinadas soluções para um problema.

Na Educação Básica são tratados, em geral, problemas de *enumeração* e de *contagem*. Além da limitação em termos de problemas combinatórios tratados, restringem-se, também, os tipos de situações a determinados níveis de ensino, apesar de recomendações em contrário de documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997).

Vergnaud (1991), Nunes e Bryant (1997) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997), chamam a atenção que dentre os problemas multiplicativos, um caso particular – geralmente trabalhado no Ensino Fundamental – envolve pensamento combinatório, denominado pelos autores e documento acima citados de, respectivamente, *produto de medidas*, *produto cartesiano* ou *situações associadas à idéia de combinatória*. Este tipo de problema envolve dois ou mais conjuntos disjuntos que são combinados, a partir da seleção de um elemento de cada um dos

[4] No presente artigo, Combinatória e Análise Combinatória são tomadas como sinônimas.

conjuntos independentes, gerando um novo conjunto de elementos, de natureza distinta da dos conjuntos disjuntos dados.

Ao se estudar a Combinatória no Ensino Médio, outros problemas são introduzidos, com casos nos quais elementos são repetidos e os que não o são: *arranjos* (a partir de um conjunto maior são escolhidos elementos cuja ordenação gera possibilidades distintas), *combinações* (que se assemelham aos arranjos em termos de escolha de elementos, com a diferença de que a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas) e *permutações* (todos os elementos do conjunto são utilizados, apenas a ordem de apresentação dos mesmos varia).

Observa-se, dessa forma, a natureza variada, e por vezes complexa, dos problemas de Combinatória – situações problematizadoras nas quais não há sempre indicação clara de caminhos diretos de solução, mas necessita-se examiná-las com atenção para verificar a natureza do tipo de problema combinatório e/ou qual(is) estratégia(s) sistemáticas pode(m) ser utilizada(s) para encontrar solução viável para o mesmo. O levantamento de casos possíveis também auxilia na análise de probabilidades, pois para o julgamento do que seja provável, improvável e impossível, o levantamento de possibilidades se faz necessário.

O *raciocínio combinatório* é aqui entendido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. Este modo de pensar é útil no cotidiano – por estar presente em situações variadas como organizações de equipes, de campeonatos esportivos, de cardápios etc. – bem como é aplicado em variadas áreas do conhecimento – tais como Biologia, Química, Estatística, Ciências da Computação dentre outras – em situações classificatórias, por exemplo. O desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, portanto, é de extrema relevância e deve ser alvo do ensino formal na Educação Básica.

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS RELATIVOS AO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Segundo Inhelder e Piaget (1976), um estágio avançado de pensamento é o denominado de *operacional formal*, o qual possui como propriedade geral a distinção entre o *real* e o *possível*. Na Combinatória é viabilizado o levantamento de todas as possíveis relações de uma situação e a análise – pela combinação de procedimentos de experimentação e de análise lógica – da validade das possibilidades. Desse modo, o *raciocínio combinatório* – como um dos componentes do pensamento formal – possui um caráter fundamentalmente hipotético-dedutivo, sendo, portanto, base de raciocínio científico, no qual é possível isolar variáveis, manter algumas constantes e variar outras.

Sendo o *raciocínio combinatório* alcançado mais plenamente em estágios avançados de desenvolvimento cognitivo, não se deve desconsiderar que a gênese desta forma de pensamento pode iniciar-se antes do alcance do período do pensamento operacional formal. Também é preciso considerar que o *raciocínio combinatório* pode desenvolver-se por meio de uma interação entre maturação cognitiva e experiências sociais – tantos as ocorridas fora da escola quanto as que se vivenciam em contextos escolares.

Fischbein (1975) ressalta que a instrução escolar desempenha um grande papel no desenvolvimento do *raciocínio combinatório*. Esta conclusão foi tirada a partir de estudos empíricos nos quais a instrução – em particular com o uso de árvores de possibilidades – permitiu avanços no desenvolvimento deste modo de pensar, auxiliando estudantes em suas faltas de capacidade de enumeração sistemática.

Outro aspecto a se considerar é o de que as situações combinatórias possuem particularidades e relações que os diferenciam entre si, mas estas se unem por aspectos em comum, constituintes, portanto de um mesmo campo conceitual – o das estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1991).

Pessoa e Borba (2009), a partir da concepção de articulação de conceitos apresentada por Vergnaud (1986), defendem que os distintos tipos de problemas combinatórios se desenvolvem desde os anos iniciais de escolarização. Assim, estas autoras – amparadas por resultados de investigação empírica a ser descrita a seguir – argumentam que se deve trabalhar em todos os níveis e modalidades de ensino com problemas de *produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*. A justificativa é a de que há relações básicas de Combinatória contidas nestes quatro tipos de problemas e levar os estudantes a terem contato com esta variedade de situações pode possibilitar um mais amplo desenvolvimento do *raciocínio combinatório*.

ESTUDOS EMPÍRICOS SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA COMBINATÓRIA

A maioria dos estudos que investigaram o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* se concentrou em tipos específicos de problemas e em níveis de ensino particulares. Inhelder e Piaget (1976) estudaram a resolução de problemas de *permutação* por crianças com idade em torno de 12 anos. Schliemann (1988) também pesquisou a resolução de *permutações*, sendo sua investigação realizada com adultos escolarizados (estudantes recentemente aprovados no exame vestibular para a universidade) e com pouca escolarização (cambistas do jogo do bicho e outros trabalhadores do mesmo grupo sócio-econômico). Miguel e Magina (2003) investigaram estratégias de estudantes de 1º ano de Licenciatura em Matemática na resolução de *permutações* simples e com repetição, de *arranjos* simples e com repetição e de *combinações*. Soares e Moro (2006) pesquisaram como crianças dos atuais 6º e 7º ano de escolarização resolvem problemas de *produto cartesiano*. Esses estudos evidenciaram conhecimentos de Combinatória influenciados por fatores diversos, dentre os quais a maturação e as experiências de aprendizagem ocorridas por instrução formal ou por meio do exercício profissional.

Observa-se uma tendência de isolar nas pesquisas os tipos de problemas investigados (apenas *produto cartesiano*, apenas *permutação* ou apenas *arranjo*, *combinação* e *permutação*) e as particularidades dos participantes (trabalhadores específicos ou estudantes de determinados níveis de ensino). Pessoa e Borba (2010) e Lima e Borba (2010) trazem outras contribuições aos estudos sobre o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, ao investigarem o conhecimento nos diversos tipos de problemas em variados níveis de ensino e, no caso da EJA, com variadas atividades profissionais.

As pesquisas de Inhelder e Piaget (1976) e de Soares e Moro (2006) contribuíram no levantamento dos possíveis estágios de desenvolvimento do *raciocínio combinatório*. Nesses estudos foram observados percursos que passam de níveis de menor para maior sistematização nas estratégias utilizadas e, por vezes, de maior formalização, também verificados por Pessoa e Borba (2010) e Lima e Borba (2010).

Pessoa e Borba (2010) analisaram o desempenho de 568 estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental aos finais do Ensino Médio ao resolverem problemas de Combinatória de distintas naturezas, descrevendo também estratégias e formas de representação simbólica selecionadas pelos participantes do estudo. Desde os anos iniciais foram observadas variadas e ricas formas de abordar as situações combinatórias, sendo a maior dificuldade a de determinar o número total de possibilidades, em particular nos problemas nos quais havia elevado número de combinações. Dificuldades com problemas com elevado número de possibilidades também foram encontrados por Esteves e Magina (2001) – com estudantes de atual 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio, bem como por Miguel e Magina (2003) – com estudantes de Licenciatura em Matemática.

Um elevado número de participantes do estudo de Pessoa e Borba (2010) evidenciou reconhecer as particularidades dos distintos problemas combinatórios e, embora tenha havido um melhor desempenho à medida que se avançava no nível de escolarização, estudantes de anos de escolaridade distintos utilizavam diversas vezes as mesmas estratégias de resolução (desenhos, listagens, quadros, árvores de possibilidade, multiplicações, *princípio fundamental da contagem*, observação de regularidades e fórmulas, esta última usada apenas por estudantes do Ensino Médio). As estratégias variavam no sentido de estabelecimento, ou não, de relações corretas e de menor ou maior sistematização utilizadas na solução apresentada. Melhores desempenhos foram obtidos em *produtos cartesianos* e mais fraco desempenho nos demais problemas combinatórios.

Resultados semelhantes foram obtidos por Lima e Borba (2010) com um grupo distinto de participantes – 150 estudantes de cinco escolas públicas em cinco módulos da EJA (Módulos I, II, III e IV dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e uma turma de Mecânica do PROEJA - Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos), sendo 30 estudantes de cada módulo. Cada participante resolveu 16 questões multiplicativas, incluindo as de Combinatória (*multiplicação direta*, *divisão partitiva*, *divisão por quotas*, *produto cartesiano direto*, *produto cartesiano inverso*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*), sendo duas questões para cada tipo de problema.

Fatores que influenciaram fortemente o desempenho dos jovens e adultos do estudo de Lima e Borba (2010) foram os anos de escolarização, o módulo freqüentado e o tipo de problema. Dentre os problemas multiplicativos, os de Combinatória evidenciaram-se como os que apresentaram maior dificuldade por parte dos estudantes, como também observado por Selva, Borba, Campos, Bivar, Ferreira, e Luna (2008). Considerando-se apenas os problemas combinatórios, os de *produto cartesiano* foram os que apresentaram mais elevados índices de acerto. Diferentemente dos resultados obtidos por Pessoa e Borba (2010), os estudantes da EJA resistiram a usar representações não-formais para a resolução dos problemas combinatórios – seja por influência da escola que, em muitos casos, desvaloriza estas estratégias, seja pela própria concepção dos estudantes que acreditam que na Matemática só são válidas soluções que contenham números e/ou operações aritméticas.

As Figuras 1, 2 e 3 exemplificam como estudantes[5] resolveram algumas das situações propostas, evidenciando que as estratégias não eram específicas a determinado grupo de estudantes. Procedimentos menos formais (desenhos, diagramas e listagens, dentre outros) e estratégias mais formais (algoritmos e/ou fórmulas) eram utilizados tanto por participantes dos anos iniciais, quanto finais do Ensino Fundamental, bem como do Ensino Médio – tanto no Ensino Regular quanto na EJA. Ressalta-se, porém, que apenas estudantes do Ensino Médio utilizavam fórmulas e o uso destas nem sempre era correto.

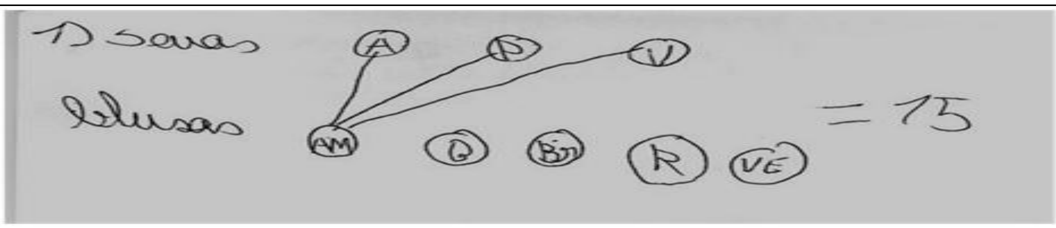


Figura 1. Solução correta de um problema de produto cartesiano apresentada por um estudante do 3º ano do Ensino Médio.

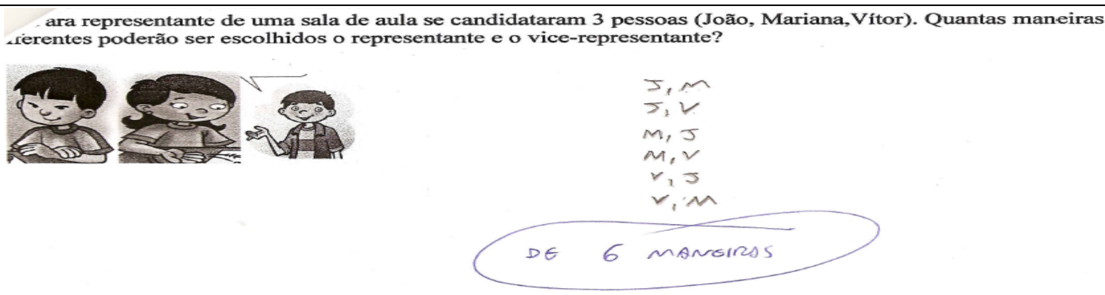


Figura 2. Solução correta de um problema de arranjo apresentada por um estudante do PROEJA – Mecânica

[5] Os estudantes da Educação de Jovens e Adultos são identificados por outras características, além do ano escolar, pois há entre estes uma variedade de profissões exercidas, de anos de escolarização e de idades.

(estudante, 19 anos de idade, oito a dez anos de estudo).

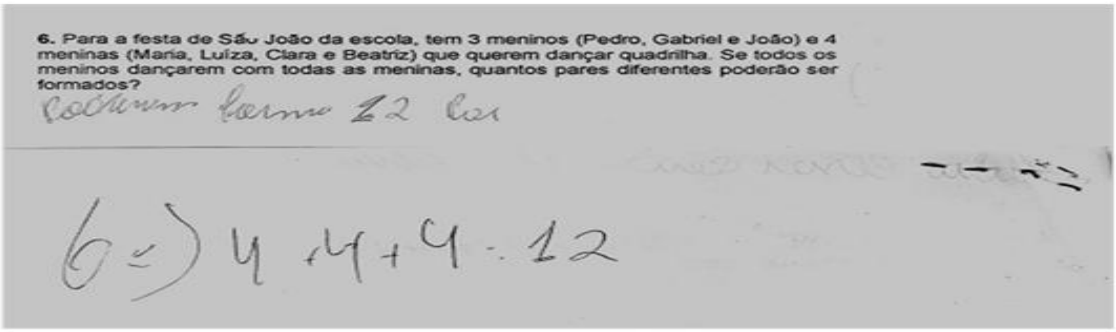


Figura 3. Solução correta de um problema de produto cartesiano apresentada por um estudante do 9º ano do Ensino Fundamental.

Os estudos sobre o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* evidenciam, assim, conhecimentos de crianças, adolescentes e adultos quanto às situações combinatórias, sendo essencial reconhecer que estes saberes podem ser desenvolvidos como resultado de maturação cognitiva, de experiências escolares – por intermédio de aprendizagem direta e indireta de Combinatória – e de vivências extra-escolares, incluindo a profissionalização. Nas investigações realizadas há indícios de conhecimentos já possuídos, mas, ainda, necessidade de instrução para ampliação do *raciocínio combinatório*.

RECURSOS DE ENSINO DA COMBINATÓRIA

Borba, Rocha, Martins e Lima (2009) investigaram estudos sobre Combinatória e os agruparam segundo as seguintes categorias: 1) Análises de recursos didáticos; 2) Reflexões sobre a formação e a prática docente; 3) Investigações de conhecimentos de estudantes e 4) Relatos de experiências vivenciadas em sala de aula. Observou-se um número relativamente pequeno de estudos que tratam especificamente deste campo. No presente artigo já foram discutidas pesquisas que tratam do conhecimento de estudantes e aqui também serão foco de discussão estudos relativos à análise de recursos para o ensino da Combinatória, em particular livros didáticos e softwares educativos.

Livros didáticos e o ensino da Combinatória

Barreto e Borba (2010) observaram como foram tratados problemas de *raciocínio combinatório* em livros do aluno e manuais do professor de cinco coleções de obras voltadas aos anos iniciais de escolarização. Verificou-se que os tipos com maiores percentuais totais de apresentação foram a *combinação* e o *produto cartesiano* e que, por vezes, os problemas combinatórios eram inseridos em capítulos que tratam do sistema de numeração decimal e de estruturas aditivas. Identificou-se uma ampla variedade de representações simbólicas utilizadas, mas nenhum trabalho com o professor quanto às propriedades invariantes da Combinatória, nem sobre os diferentes significados envolvidos. A Figura 4 é um exemplo de situação combinatória proposta, na qual se pode observar a adequação de contexto para o público infantil.

Martins e Borba (2010) investigaram como as 19 obras aprovadas no Plano Nacional do Livro de Alfabetização 2008 – voltados para a alfabetização de jovens e adultos – abordaram problemas multiplicativos. Observou-se que, em geral, os livros analisados dedicaram maior parte para a leitura e escrita de textos, com menor espaço para a alfabetização matemática. Os problemas com maior frequencia foram os de multiplicação direta e divisão direta e um número muito reduzido de problemas de Combinatória. Apesar de poucos problemas combinatórios tratados, ressalta-se que os mesmos foram inseridos por meio de contextos adequados ao público-alvo, pois retratam situações matemáticas cotidianas de jovens e adultos, como se pode observar nas Figuras 5.

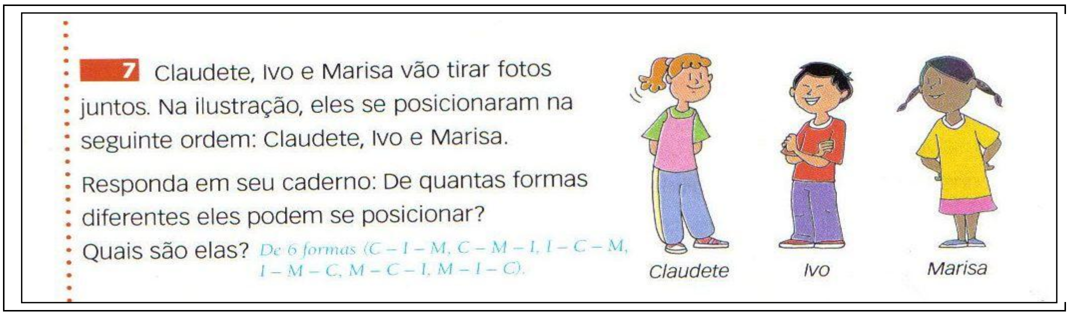


Figura 4. Exemplo de permutação de livro de 4º ano do Ensino Fundamental[6].

[6] Extraído da coleção Vivência e Construção, de Luiz Roberto Dante.

1 Iolanda está fazendo 4 tipos de sabonete e 2 tipos de xampu para vender.
Em cada caixa ela coloca 1 sabonete e 1 xampu.
Quantas caixas diferentes ela pode montar?

$2 \times 4 = 8$

$\begin{array}{r} 4 \\ \times 2 \\ \hline 8 \end{array}$

Fotos: Dynamic Graphics

Resposta: Ela pode montar 8 caixas diferentes.

Figura 5. Exemplo de problema de produto cartesiano direto em livro da EJA.[7]

Os estudos sobre a análise de livros didáticos evidenciam que há uma variedade de situações combinatórias presentes em coleções de livros de Matemática dos anos iniciais – do Ensino Regular e da Educação de Jovens e Adultos – mas em quantidade muito reduzida, quando comparado ao total de problemas de multiplicação e divisão. Ressalta-se também que não é chamada a atenção do professor sobre a diversificação de problemas e sobre as particularidades de cada tipo de problema de Combinatória. Dessa forma, o trabalho matemático a ser desenvolvido, a partir do uso destes livros didáticos, pode ficar limitado a poucas oportunidades que os estudantes terão para pensar sobre as situações de Combinatória e a desenvolverem, assim, seus *raciocínios combinatórios*.

Softwares educacionais voltados para a aprendizagem da Combinatória

Sandoval, Trigueros e Lozano (2007), objetivaram contribuir para reverter o quadro de dificuldade de muitos estudantes mexicanos em resolverem problemas que necessitam de análise combinatória. Para a superação de dificuldades dos estudantes, as autoras utilizaram um software – *Diagrama de Árbol* – que explora situações combinatórias por meio da construção de árvores de possibilidades. O software permite o levantamento de *produtos cartesianos*, *arranjos*, *combinações* e *permutações*, utilizando cores para destacar possibilidades viáveis. Participaram da pesquisa 25 estudantes mexicanos de 11 a 13 anos e observou-se que o software permitiu que fossem representadas as situações combinatórias variadas e se desenvolvessem estratégias mais eficientes para abordá-las.

[7] Retirado do livro Alfabetização de Jovens e Adultos - Vale A Pena! de Erdna Perugine Nahum.

Embora a avaliação de Sandoval et al (2007) tenha sido bastante positiva, é necessário que se atente para as vantagens e limites do uso do software proposto, em particular para a necessidade de, nos casos de problemas de *combinação* – ser chamada a atenção da necessidade de excluir casos repetidos que são gerados se todas as possibilidades são representadas na árvore. Falta de *feedback* específico a cada tipo de problema combinatório também é um limite do software que precisa ser considerado.

Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) analisaram cinco softwares/objetos de aprendizagem voltados para o ensino da Combinatória: *Diagrama de Árbol* (Aguirre, 2005), *ML Combiner* (Lees, 2001), *Combinação* (RIVED, 2008), *Permutação* (RIVED, 2008) e *Arranjo* (RIVED, 2008). Algumas telas desses recursos analisados são apresentadas nas Figuras 6 e 7 que evidenciam a variedade de situações abordadas pelo conjunto de softwares/objetos de aprendizagem analisados.

Tomando como base a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1986), foram identificados os *significados* abordados, as formas de *representação simbólica* apresentadas e sugeridas pelos softwares e objetos de aprendizagem, bem como os *invariantes* explicita e implicitamente trabalhados. Observou-se que os softwares educativos e os objetos de aprendizagem analisados, com exceção do *Árbol*, trabalham com tipos limitados de situações combinatórias – em termos de significados abordados e respectivas propriedades e relações invariantes a eles associados – e permitem pouca exploração por parte dos usuários, pois tendem a sugerir que, após algumas poucas tentativas, se utilize a fórmula apropriada para a situação dada.

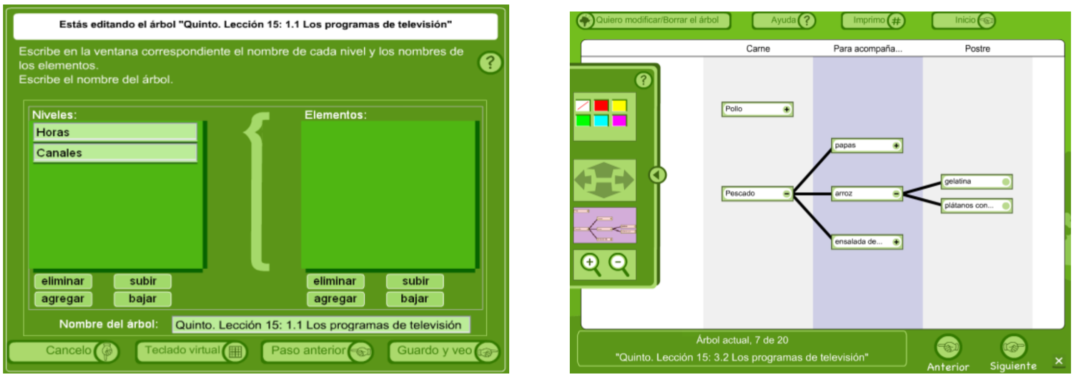


Figura 6. Diagrama de Árbol (Aguirre, 2005).

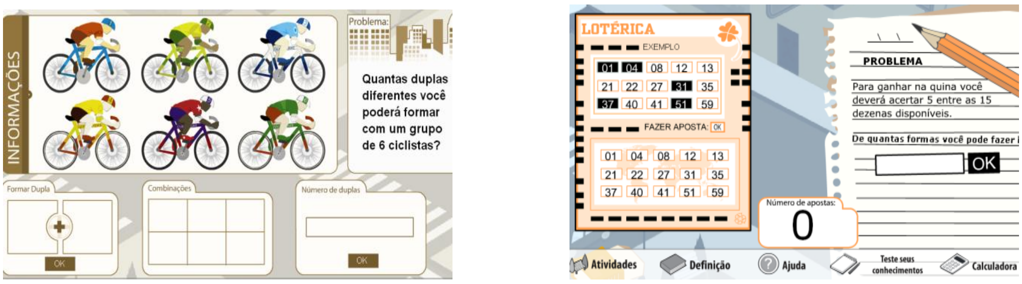
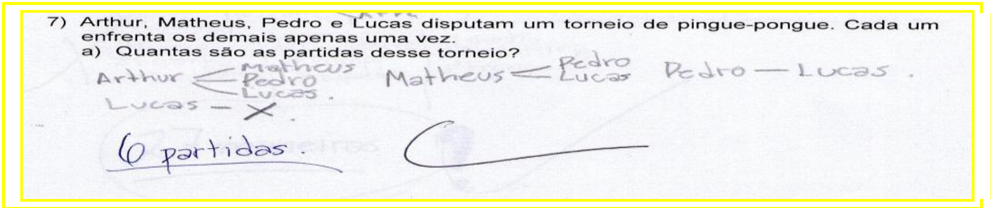


Figura 7. Combinação (RIVED, 2008).

Além da limitação destes recursos referente à formalização rápida das situações combinatórias, Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) salientam que para haver possibilidade de melhor uso de recursos tecnológicos (objetos de aprendizagem e softwares educacionais) para o ensino da Combinatória, variadas representações simbólicas devem ser viabilizadas. Outras questões importantes a serem consideradas são: *feedback* compatível com o tipo de invariante a ser mobilizado e *ajudas ao usuário* que oportunizem a reflexão sobre a situação a ser resolvida e possibilitem a reformulação de estratégias de resolução.

Ferraz, Borba e Azevedo (2010) analisaram como o software *Árbol* pode servir de suporte ao desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, a partir do acompanhamento de 19 estudantes de 7º ano de escolarização, agrupados em duplas e trios, ao resolverem oito problemas combinatórios. Cada problema possuía dois itens que envolviam números que levavam a menor *(a)* e a maior *(b)* número de possibilidades na solução, sendo o primeiro item solucionado com o auxílio do software e o segundo item por meio de estratégia de resolução escolhida pelos estudantes.

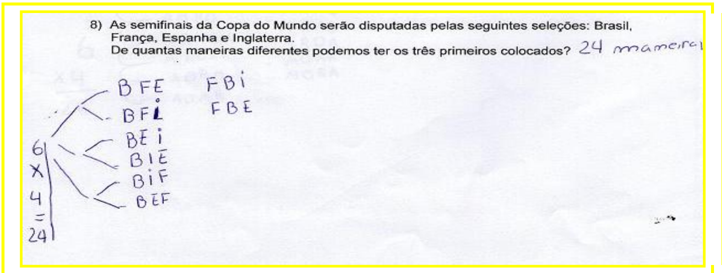
Ferraz, Borba e Azevedo (2010) observaram que a árvore de possibilidades – seja virtualmente produzida, seja no lápis e papel – pode ser um recurso que auxilie os estudantes na compreensão dos variados tipos de problemas combinatórios. Porém, apesar de expectativa anteriormente levantada, verificou-se que o uso do software para os primeiros itens, nem sempre foi suficiente para auxiliar os estudantes na generalização necessária para o item b – no qual a representação de todas as possibilidades era inviável. Nas Figuras 8 e 9 podem ser observadas soluções apresentadas pelos participantes do estudo, as quais evidenciam como árvores de possibilidades foram usadas em diferentes tipos de situações.


7) Arthur, Matheus, Pedro e Lucas disputam um torneio de pingue-pongue. Cada um enfrenta os demais apenas uma vez.
a) Quantas são as partidas desse torneio?

Arthur < Matheus, Pedro, Lucas. Matheus < Pedro, Lucas. Pedro — Lucas. Lucas — X.

6 partidas.

Figura 8. Solução correta para um problema de combinação com menor número de possibilidades.


8) As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Espanha e Inglaterra.
De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados? 24 maneiras

BFE FBI
BFI FBE
BEI
BIE
BIF
BEF

6 x 4 = 24

Figura 9. Solução correta para um problema de arranjo.

No estudo, Ferraz, Borba e Azevedo (2010) entrevistaram pelo menos um dos integrantes de cada dupla ou trio acerca das vantagens e desvantagens do uso do software *Árbol*. Alguns estudantes apontaram a vantagem da forma organizada com a qual os problemas combinatórios podiam ser resolvidos e outros apontaram desvantagens do software como a impossibilidade de ver simultaneamente todas as combinações na tela, o idioma, já que todos os comandos estão em espanhol, a falta de *feedback* quanto ao acerto da questão e a necessidade de enumerar todos os casos para posterior destaque dos casos válidos.

Pelo levantamento da análise de recursos tecnológicos, observa-se o potencial destes no ensino da Combinatória, mas verificam-se limitações dos softwares e objetos de aprendizagem que precisam ser levadas em consideração para viabilizar o melhor aproveitamento dos mesmos no ensino da Combinatória.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisado sob uma perspectiva teórica, as situações combinatórias são excelentes oportunidades de estimular o raciocínio lógico-dedutivo de estudantes de diferentes níveis de ensino da Educação Básica (dos anos iniciais do Ensino Fundamental aos finais do Ensino Médio) e em distintas modalidades (Ensino Regular e Educação de Jovens e Adultos). Os problemas combinatórios requerem uma análise cuidadosa para escolha de estratégias válidas de solução e muitas destas exigem sistematização criteriosa de modo a ser possível enumerar, direta ou indiretamente, todas as possibilidades válidas.

Estudos empíricos diversos evidenciam que o *raciocínio combinatório* desenvolve-se influenciado por experiências escolares (como defendido por Fischbein, 1975), por vivências profissionais e de instrução específica (como evidenciado por Schliemann, 1988), e por ensino direto ou indireto (conforme observado por Pessoa e Borba, 2010 e Lima e Borba, 2010).

As propostas de recursos didáticos analisados – livros e softwares – denotam a necessidade de se considerar uma maior amplitude no que concerne ao trabalho com a Combinatória. Dentro do estudo das estruturas multiplicativas, o pensamento combinatório pode ser mais amplamente explorado – por meio de situações diversificadas e de formas de representação válidas para a solução de situações combinatórias – possibilitando desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e de estratégias de sistematização por parte dos estudantes. Em particular, no uso de recursos tecnológicos há carência de propostas de trabalho mais independentes por parte dos estudantes – com *feedback* e *ajudas* que possibilitem reflexões sobre os conceitos tratados, bem como sobre as escolhas e reformulações de estratégias de resolução de situações combinatórias.

O conjunto de temáticas aqui tratadas evidenciam que para um amplo desenvolvimento do *raciocínio combinatório* é recomendável aproveitar estratégias espontaneamente desenvolvidas pelos estudantes (tais como desenhos, diagramas e listagens), estimulando-os a pensarem sobre generalizações possíveis no estudo das situações combinatórias. Estas generalizações possibilitarão o reconhecimento da natureza multiplicativa dos problemas de Combinatória, o que facilitará a compreensão que nas diversas situações combinatórias o *Princípio Fundamental da Contagem* é válido e que este princípio é base das fórmulas utilizadas na Análise Combinatória.

Os estudos aqui relatados sugerem que o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* é importante para outras compreensões matemáticas (como o desenvolvimento de noções básicas da probabilidade – apontado em Santana e Borba, 2010) e que há necessidade de tratar destas questões na formação de professores (como sendo estudado por Rocha e Borba, 2010). A investigação referente ao desenvolvimento do *raciocínio combinatório* é, portanto, um rico campo de investigação de amplas aplicações práticas em sala de aula, almejando avanços conceituais de estudantes – em particular os da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, C. Diagrama de Árbol. *Mutimidea*, 2005.

BARRETO, Fernanda & BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador, 2010.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan & NAVARRO-PELAYO, Virginia. *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Editorial Síntese, S.A., 1996.

BORBA, Rute; ROCHA, Cristiane; MARTINS, Glauce & LIMA, Rita. O que dizem os estudos recentes sobre o raciocínio combinatório? *Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*. Junho de 2009, Ijuí - RS.

BRASIL, MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

ESTEVES, Inez & MAGINA, Sandra. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental. *Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática*, Rio de Janeiro, 2001.

FERRAZ, Martha; BORBA, Rute & AZEVEDO, Juliana. *Usando o software Árbol na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios.* Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.

FISCHBEIN, Efraim. *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*, Reidel, Dordrecht, 1975.

INHELDER, Barbara & PIAGET, Jean. Da lógica da criança à lógica do adolescente. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1976.

LEITE, Maici; PESSOA, Cristiane; FERRAZ, Martha & BORBA, Rute. Softwares Educativos e Objetos de Aprendizagem: Um olhar sobre a Análise Combinatória. *Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*. Junho de 2009, Ijuí - RS.

LEES, Michael, A. ML Combiner 1.00. Copyright, 2001.

LIMA, Rita & BORBA, Rute. O raciocínio combinatório de alunos da Educação de Jovens e Adultos: do início da escolarização até o Ensino Médio. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, 2010.

MARTINS, Glauce & BORBA, Rute. Livros didáticos de alfabetização de jovens e adultos: um estudo sobre as estruturas multiplicativas. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, 2010.

MIGUEL, Maria Inez & MAGINA, Sandra. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. *Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Santos, 2003.

MORGADO, Augusto; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João; PINTO CARVALHO, Paulo & FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e probabilidade com as soluções dos exercícios*. Rio de Janeiro: SBM, 2006 (Coleção do Professor de Matemática. 9ª edição.

NUNES, Terezinha & BRYANT, Peter. *Crianças fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. *Zetetike* (UNICAMP), v. 17, p. 105-150, 2009.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador, 2010.

RIVED. Rede Interativa Virtual de Educação. SEED/MEC. *Objeto de Aprendizagem Combinação*. Disponível em: http://RIVED.mec.gov.br/atividades/matematica/combinacao/combinacao.swf Acesso: set. 2008.

RIVED. Rede Interativa Virtual de Educação. SEED/MEC. *Objeto de Aprendizagem Permutação*. Disponível em: http://RIVED.mec.gov.br/atividades/matematica/permutacao/permutacao.swf. Acesso: set. 2008.

RIVED. Rede Interativa Virtual de Educação. SEED/MEC. *Objeto de Aprendizagem Arranjo*. Disponível em: http://www.RIVED.mec.gov.br/site_objeto_ver.php?codobjeto=218 Acesso: set. 2008.

SANDOVAL, Ivone; TRIGUEIROS, Maria & LOZANO, Dolores. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. In: *Anais da XII Conferencia Interamericano de Educación Matemática*, Querétaro, México, 2007.

SANTANA, Michaelle & BORBA, Rute. O acaso, o provável, o determinístico: um estudo sobre concepções e práticas de professores do Ensino Fundamental. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, 2010.

SELVA, Ana; BORBA, Rute; CAMPOS, Tânia; BIVAR, Dayse; FERREIRA, Maria Neuza; LUNA, Maria Helena. O raciocínio multiplicativo de crianças de 3ª e 5ª séries: O que compreendem? Que dificuldades apresentam? *Anais do 2º Simpósio Internacional de Educação Matemática.* Recife, 2008.

SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David & SCHLIEMANN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez, 1988.

SOARES, Maria. Teresa. & MORO, Maria Lúcia. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. *Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.* Águas de Lindóia, SP, 2006.

ROCHA, Cristiane & BORBA, Rute. Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diferentes olhares. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica, 1,* 1986, pp. 75-90.

VERGNAUD, Gérard. *El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Mexico: Trillas, 1991.